Analysis : Küstenlinie

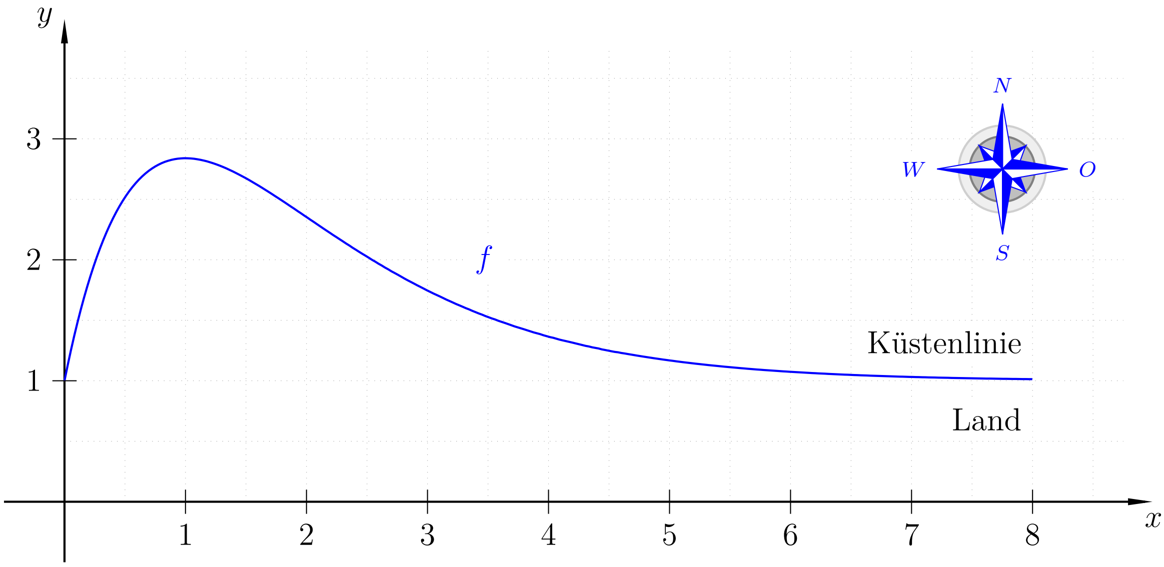
1 Küstenlinie - Aufgaben

Für den Beginn des Jahres 2020 modelliert der Graph der Funktion f mit

$$f(x) \;=\; 5x \cdot e^{-x} + 1 \quad \text{und} \quad x \in [0;8]$$

einen Teil der Küstenlinie, die das Land vom Meer trennt. Die x-Achse beschreibt eine Straße in West-Ost-Richtung. Die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse stellt das Land nördlich der Straße dar. Bei $L(0{,}5|1{,}5)$ steht ein Leuchtturm.

Eine Längeneinheit entspricht 100 m in der Wirklichkeit.



1. *Abbildung*

   (a) Zeichnen Sie den Punkt L auf dem *Arbeitsblatt* ein.
   Berechnen Sie die y-Koordinate des Punktes der Küstenlinie an der Stelle $x = 0{,}5$.

   (2 P)

   (b) Zeichnen Sie die Tangente an den Graphen f an der Stelle $x = 2$ in das *Arbeitsblatt* ein, und bestimmen Sie deren Steigung.

   (2 P)

(c) Es gibt auf dem betrachteten Teil der Küstenlinie Punkte, deren Abstand von der Straße 200 m beträgt.
Zeichnen Sie die entsprechende Punkte in das *Arbeitsblatt* ein.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

(3 P)

Lösung

Hinweis:
Mit gleichzeitigem Drücken von $\boxed{Strg}$ und Lösung bzw. $\boxed{Ctrl}$ und Lösung wird die Lösung in einem neuen Tab angezeigt.

2. *Küstenlinie*

(a) Berechnen Sie die Koordinaten des nördlichsten Punkts auf dem betrachteten Teil der Küstenlinie.

$$\left[\text{Zur Kontrolle: } f'(x) \;=\; 5e^{-x} \cdot (1-x)\right]$$

(5 P)

(b) Bestimmen Sie alle Stellen $x \in [0; 8]$, für die $f''(x) \;=\; 0$ gilt.

(3 P)

(c) Berechnen Sie den mittleren Abstand der Punkte des betrachteten Teil der Küstenlinie zur Straße in Metern.

(3 P)

(d) Bestimmen Sie mittels Integration einen Funktionsterm für eine Stammfunktion F von f.

(4 P)

Lösung

Der betrachtete Teil der Küstenlinie wird sich im Laufe der Jahre verändern. In einem Rechenmodell wird der künftige Verlauf für $a \geq 20$ durch die Funktion f_a mit

$$f_a(x) \;=\; 5x \cdot e^{-0{,}05a\cdot x} + 1 \quad \text{und} \quad x \in [0; 8]$$

modelliert. Der Wert von a gibt an, wie viele Jahre seit Beginn des Jahres 2000 vergangen sind. Also entspricht $a = 20$ dem Beginn des Jahres 2020.

3. *Änderung der Küstenlinie*

   (a) Berechnen Sie, in welchem Jahr der Leuchtturm auf der Küstenlinie stehen wird.

   (3 P)

   Für jedes a hat der Graph der Funktion f_a einen Hochpunkt an der Stelle $x = \frac{20}{a}$. Dieser Hochpunkt beschreibt den nördlichsten Punkt der jeweiligen Küstenlinie.

   (b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ortskurve, auf der die Hochpunkte liegen.

   (3 P)

   (c) Vom Leuchtturm aus führt ein Weg genau in Nordrichtung. Zu einem bestimmten Zeitpunkt endet dieser Weg am nördlichsten Punkt der Küstenlinie.
   Bestimmen Sie die Länge des Weges zu diesem Zeitpunkt.

   (3 P)

   Lösung

4. *Landfläche*

   (a) Berechnen Sie den Inhalt der Landfläche zwischen der Küstenlinie und der Straße im Intervall $[0; 8]$ zu Beginn des Jahres 2150.
   Begründen Sie, dass der Inhalt der Landfläche auch in allen Jahren nach 2150 größer als 8 Hektar sein wird.

   (4 P)

   (b) Es gibt genau eine Wert $a \geq 20$, der die folgende Gleichung erfüllt:

   $$\int_0^8 \Big(5x \cdot e^{-0{,}05a \cdot x} + 1\Big)dx \;=\; 0{,}8 \cdot \int_0^8 \Big(5x \cdot e^{-x} + 1\Big)dx$$

   Interpretieren Sie die Bedeutung dieses Wertes a im Sachzusammenhang.

   (2 P)

   (c) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen a, für die $f_a(x) < f(x)$ für $0 < x \leq 8$ gilt.

   (3 P)

Lösung

2 Arbeitsblatt